MATHEMATICS

ERWEITERUNGEN VON GRENZGRUPPEN

VON

F. LOONSTRA

(Communicated by Prof. H. FREUDENTHAL at the meeting of June 29, 1957)

§ 1. *Einleitung*

Gegeben seien Gruppen

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

und für jedes n ein Homomorphismus k_n von A_{n+1} auf A_n; A sei die inverse Grenzgruppe der Folgen $\{A_n\}$ und $\{k_n\}$.

Analog bestimmen zwei Folgen $\{B_n\}$ und $\{h_n\}$ eine inverse Grenzgruppe B. Es sei $G_1(A_1; B_1)$ eine Erweiterung von A_1 durch die Gruppe B_1; es ist dann mit Hilfe von G_1 immer möglich, eine Folge von Erweiterungen

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$$

zu konstruieren, wo $G_n = G_n(A_n; B_n)$ eine Erweiterung von A_n durch B_n darstellt, und auszerdem eine Folge von Homomorphismen $\{g_n\}$ von G_{n+1} auf $G_n (n=1, 2, \ldots)$, derart, dasz g_n die Homomorphismen k_n und h_n induziert.

Es zeigt sich, dasz die mit Hilfe der Folgen $\{G_n\}$ und $\{g_n\}$ gebildete inverse Grenzgruppe G eine Erweiterung der Grenzgruppe A durch B ist, und weiter, dasz man jede Erweiterung G von A durch B bekommt als inverse Grenzgruppe geeigneter Folgen $\{G_n(A_n; B_n)\}$ und $\{g_n\}$.

Ordnet man jedem Paar $(A_n; B_n)$ die Gruppe $\mathscr{A}_n(A_n; B_n)$ der Erweiterungen von A_n durch B_n zu, so läszt sich mit der Folge $\{\mathscr{A}_n\}$ und einer geeignete Abbildung eine inverse Grenzgruppe definieren, welche isomorph ist mit $\mathscr{A}(A; B)$.

Schlieszlich werden die hier entwickelten Methoden noch angewendet für den Fall der direkten Grenzgruppen und für den Fall, dasz die Homomorphismen h_n die Gruppe B_{n+1} in B_n abbilden $(n=1, 2, \ldots)$.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dasz alle Gruppen – auch die Erweiterungen – abelsche Gruppen sind. Wenn man *nur* voraussetzt, dasz A abelsch ist, so läszt sich zeigen, dasz die homomorphe Abblidung von $\mathscr{A}(A; B)$ in $\mathscr{A}(A; B')$ ein Epimorphismus ist, wenn $h(B)=B'$.

§ 2. In die Arbeit ,,Homomorphe Abbildungen von Gruppenerweiterungen'' [1]) ist folgendes Problem untersucht worden: Seien A, A', B und

[1]) F. LOONSTRA, Indag. Math., 19, 1957, 44–54; kurz anzugeben mit: Hom.Abb.

B' gegebene Gruppen (A und A' abelsch), k eine homomorphe Abbildung von A auf A', h eine homomorphe Abbildung von B auf B'; ist es möglich, sich eine Übersicht zu verschaffen aller möglichen — auch nichtabelschen — Erweiterungen $G(A; B)$ und $G'(A'; B')$ derart, dasz es eine homomorphe Abbildung g von G auf G' gibt, so dasz g die gegebenen Homomorphismen k und h induziert?

Im Folgenden sind alle Gruppen abelsch. Es seien $G(A; B)$ und $G'(A'; B')$ zwei Erweiterungen, g eine homomorphe Abbildung von G auf G', so dasz $k(A)=A'$, $h(B)=B'$; wählt man die Repräsentanten $g_\alpha \in G$ (für jedes $\alpha \in B$) und $g'_{\alpha'} \in G'$ (für jedes $\alpha' \in B'$) derart, dasz

$$g(g_\alpha)=g'_{\alpha'} \text{ für } h(\alpha)=\alpha',$$

und $g_\varepsilon=e$, $g'_{\varepsilon'}=e'$, so zeigt sich leicht, dasz die zueinander gehörigen Faktoren $m_{\alpha,\beta}$ und $m'_{\alpha',\beta'}$ den folgenden Relationen genügen:

$$m_{\alpha,\beta}=m_{\beta,\alpha} \tag{1}$$

$$m_{\alpha\beta,\gamma}\cdot m_{\alpha,\beta}=m_{\alpha,\beta\gamma}\cdot m_{\beta,\gamma} \tag{2}$$

$$k(m_{\alpha,\beta})=m'_{\alpha',\beta'} \text{ wenn } h(\alpha)=\alpha',\ h(\beta)=\beta' \tag{3}$$

und es ist

$$g(\alpha; a)=(h(\alpha); k(a))=(\alpha'; a').$$

Sind umgekehrt A, A', B und B' mit den homomorphen Abbildungen $k(A)=A'$, $h(B)=B'$ gegeben und verlangt man, die genannten Erweiterungen $G(A; B)$, $G'(A'; B')$ und die Abbildung g zu bestimmen, so braucht man für eine mögliche Lösung $G(A; B)$ nur Faktorsysteme $\{m_{\alpha,\beta}\}$ zu bestimmen, welche (1), (2) und (3) befriedigen, d.h. Systeme $\{m_{\alpha,\beta}\}$, für die

$$k(m_{\alpha_1,\beta_1})=k(m_{\alpha_2,\beta_2}), \text{ wenn } h(\alpha_1)=h(\alpha_2),\ h(\beta_1)=h(\beta_2). \tag{3*}$$

Durch ein solches System $\{m_{\alpha,\beta}\}$ ist auch ein zugehöriges System $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ für eine Erweiterung $G'(A'; B')$ bekannt, und mit den Erweiterungen hat man auch die Abbildung g:

$$g(\alpha; a)=(h(\alpha); k(a))=(\alpha'; a').$$

Sind $\{m_{\alpha,\beta}\}$ und $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ zwei Systeme, welche (1), (2) und (3) befriedigen, ebenso wie die Systeme $\{\bar{m}_{\alpha,\beta}\}$ und $\{\bar{m}'_{\alpha',\beta'}\}$, so identifizieren wir die Lösungen $\{G; g; G'\}$ und $\{\bar{G}; \bar{g}; \bar{G}'\}$, wenn es zwei Systeme $\{c_\alpha\}$ und $\{c'_{\alpha'}\}$ von Elementen aus A, bzw. A' gibt, so dasz immer

$$c'_{\alpha'}=k(c_\alpha)=k(c_\beta), \text{ wenn } h(\alpha)=h(\beta)=\alpha',$$

und auszerdem

$$\bar{m}_{\alpha,\beta}=c_{\alpha\beta}^{-1}\, m_{\alpha,\beta}\, c_\alpha\, c_\beta,$$
$$\bar{m}'_{\alpha',\beta'}=c'^{-1}_{\alpha'\beta'}\, m'_{\alpha',\beta'}\, c'_{\alpha'}\, c'_{\beta'}.$$

Die Faktorsysteme, welche (1), (2) und (3*) genügen, bilden eine Untergruppe $F^*(A; B)$ der Gruppe $F(A; B)$ aller Systeme $\{m_{\alpha,\beta}\}$, welche nur

(1) und (2) befriedigen. Ebenso bilden die Transformationssysteme $\{c_{\alpha\beta}^{-1}\, c_\alpha\, c_\beta\}$ (mit $k(c_{\alpha_1})=k(c_{\alpha_2})$, wenn $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$) eine Untergruppe $T^*(A\,;\,B)$ der Gruppe $T(A\,;\,B)$ aller möglichen Transformationssysteme $\{c_{\alpha\beta}^{-1}\, c_\alpha\, c_\beta\}$.

Die verschiedenen nicht-äquivalenten Lösungen $G(A\,;\,B)$ stehen in ein-eindeutiger Korrespondenz mit den Elementen der Faktorgruppe

$$\mathscr{A}^*(A\,;\,B)=F^*(A\,;\,B)/T^*(A\,;\,B).$$

Für eine Lösung des – in der Einleitung genannten – Problems musz man gewissermaszen die umgekehrte Frage beantworten: Seien A, A', B und B', ebenso wie die homomorphen Abbildungen $k(A)=A'$, $h(B)=B'$ gegeben, und sei $G'(A'\,;\,B')$ eine Erweiterung von A' durch B'; kann man dann immer eine Erweiterung $G(A\,;\,B)$ und eine homomorphe Abbildung g von $G(A\,;\,B)$ auf $G'(A'\,;\,B')$ finden, die genau k und h induziert? Es zeigt sich, dasz eine solche Erweiterung $G(A\,;\,B)$ und eine geeignete Abbildung g immer existieren. Wir zerlegen das Problem in zwei Teile:

Erstens setzen wir voraus, dasz $k(A)=A'$, und dasz B und B' identisch sind, h die identische Abbildung; zweitens wird k die identische Abbildung von A auf $A'=A$ und $h(B)=B'$.

§ 3. Es seien $G(A\,;\,B)$ und $G'(A'\,;\,B)$ zwei Erweiterungen, so dasz die Abbildung $g(G)=G'$ genau $k(A)=A'$ und die identische Abbildung von B auf B induziert; wählt man dann die Repräsentanten $\{g_\alpha\}$ und $\{g'_\alpha\}$ so, dasz $g(g_\alpha)=g'_\alpha$, so zeigt sich

$$k(m_{\alpha,\beta})=m'_{\alpha,\beta}. \tag{3'}$$

Es wird also jedem Faktorsystem $\{m_{\alpha,\beta}\}$, dasz (1) und (2) befriedigt, ein System $\{m'_{\alpha,\beta}\}$ zugeordnet, das ebenso (1) und (2) befriedigt.

Mit jedem Element aus $F(A\,;\,B)$ stimmt also ein Element von $F'(A'\,;\,B)$ überein und die Korrespondenz bildet ein Transformationssystem ab auf ein Transformationssystem; sie ist eine homomorphe Abbildung, also gibt es eine homomorphe Abbildung von

$$\mathscr{A}(A\,;\,B) \text{ in } \mathscr{A}'(A'\,;\,B).$$

Mit Hilfe der Bemerkung am Schlusz von Hom. Abb. (S. 53, 54) und mit Hilfe eines noch nicht veröffentlichten Satzes von R. Baer, sieht man, dasz der Homomorphismus von $\mathscr{A}(A\,;\,B)$ in $\mathscr{A}'(A'\,;\,B)$ eine „auf"-Abbildung ist; für jede Erweiterung $G'(A'\,;\,B)\in\mathscr{A}'(A'\,;\,B)$ gibt es also mindestens ein Urbild $G(A\,;\,B)$, dasz von einer homomorphen Abbildung g derart auf $G'(A'\,;\,B)$ abgebildet wird, dasz g die Abbildung $k(A)=A'$ und die identische Abbildung von B induziert.

Seien jetzt $G(A\,;\,B)$ und $G'(A\,;\,B')$ zwei Erweiterungen von A durch B (bzw. von A durch B'), g eine homomorphe Abbildung von G auf G', welche A elementsweise invariant läszt und die homomorphe Abbildung

$h(B)=B'$ induziert. Sind die Repräsentanten $\{g_\alpha\}$ und $\{g'_{\alpha'}\}$ mit $g_\varepsilon=e$, $g'_{\varepsilon'}=e$ und $g(g_\alpha)=g'_{\alpha'}$ wenn $h(\alpha)=\alpha'$, so findet man

$$k(m_{\alpha,\beta})=m_{\alpha',\beta'}, \text{ wenn } h(\alpha)=\alpha',\ h(\beta)=\beta';$$

es ist aber k die identische Abbildung von A auf sich, also ergibt sich

$$(3'') \qquad m_{\alpha,\beta}=m_{\alpha',\beta'} \text{ wenn } h(\alpha)=\alpha',\ h(\beta)=\beta'.$$

Sind umgekehrt A, B und B' mit $h(B)=B'$ gegeben und bilden die $m_{\alpha,\beta}$ ein System, das (1) und (2) genügt und auszerdem

$$m_{\alpha_1,\beta_1}=m_{\alpha_2,\beta_2} \text{ wenn } h(\alpha_1)=h(\alpha_2),\ h(\beta_1)=h(\beta_2),$$

so bestimmen die $\{m_{\alpha,\beta}\}$ eine Erweiterung $G(A;B)$ und die $\{m_{\alpha',\beta'}\}$ mit $m_{\alpha',\beta'}=m_{\alpha,\beta}$ für $h(\alpha)=\alpha'$, $h(\beta)=\beta'$ eine Erweiterung $G'(A;B')$. Es sei $F^*(A;B)$ die Gruppe der Faktorsysteme $\{m_{\alpha,\beta}\}$, welche (1), (2) und (3″) befriedigen.

Bilden die $\{c_\alpha\}$ ein System aus A mit $c_\alpha=c_\beta$ wenn $h(\alpha)=h(\beta)$, so ist $\{c_{\alpha\beta}^{-1}\, c_\alpha\, c_\beta\}$ ein Transformationssystem, das auch zu F^* gehört; diese Systeme bilden eine Untergruppe T^* von F^*, die verschiedenen nichtäquivalenten Lösungen $G(A;B)$ stehen in eineindeutiger Korrespondenz mit den Elementen der Faktorgruppe $\mathscr{A}^*(A;B')$. In dieser Weise bestimmt man eine homomorphe Abbildung von $\mathscr{A}^*(A;B)$ in $\mathscr{A}(A;B')$.

Sei nun umgekehrt $\{m_{\alpha',\beta'}\}$ ein System von $\mathscr{A}(A;B')$; dieses System bestimmt eindeutig ein System $\{m_{\alpha,\beta}\}$ für eine passende Erweiterung G von A durch B, so dasz auszerdem $m_{\alpha,\beta}=m_{\alpha',\beta'}$ wenn $h(\alpha)=\alpha'$, $h(\beta)=\beta'$.

Es sind ja die $m_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt durch $m_{\alpha,\beta}=m_{\alpha',\beta'}$ wenn $h(\alpha)=\alpha'$, $h(\beta)=\beta'$. Aus $m_{\alpha',\beta'}=m_{\beta',\alpha'}$ folgt sofort $m_{\alpha,\beta}=m_{\beta,\alpha}$.

Wenn auszerdem

$$m_{\alpha'\beta',\gamma'}\cdot m_{\alpha',\beta'}=m_{\alpha',\beta'\gamma'}\cdot m_{\beta',\gamma'},$$

so gilt auch

$$m_{\alpha\beta,\gamma}\cdot m_{\alpha,\beta}=m_{\alpha,\beta\gamma}\cdot m_{\beta,\gamma}.$$

Jedes System $\{m_{\alpha',\beta'}\}$ bestimmt also eindeutig ein System $\{m_{\alpha,\beta}\}$, das (1), (2) und (3″) genügt.

Die homomorphe Abbildung von $\mathscr{A}^*(A;B)$ in $\mathscr{A}(A;B')$ ist also eine isomorphe Abbildung; jede Erweiterung $G'(A;B')$ bestimmt also eindeutig eine Erweiterung $G(A;B)$ und eine homomorphe Abbildung g von G auf G', welche die gegebene homomorphe Abbildung k induziert und A elementsweise invariant läszt. Die Kombination der beiden besprochenen Spezialfälle gibt uns folgender

Satz I. Seien $G'(A';B')$ eine Erweiterung der Gruppen A' und B', A and B zwei Gruppen, für die die gegebenen homomorphen Abbildungen $k(A)=A'$, $h(B)=B'$ existieren, so gibt es immer eine Erweiterung $G(A;B)$ und eine homomorphe Abbildung g von G auf G', so dasz g die Abbildungen

k und h induziert. $G'(A'; B')$ bestimmt ja eindeutig eine Erweiterung $G''(A'; B)$ und auszerdem eine homomorphe Abbildung g_1 von G'' auf G', welche genau h induziert und A' elementsweise invariant läszt; für $G''(A'; B)$ gibt es immer eine Erweiterung $G(A; B)$ und eine homomorphe Abbildung g_2 von $G(A; B)$ auf $G''(A'; B)$, welche k induziert und B elementsweise invariant läszt. $G(A; B)$ besitzt dann die Eigenschaft, eine Erweiterung von A durch B zu sein, für die eine homomorphe Abbildung $g = g_1 g_2$ von G auf G' existiert, welche genau die Abbildungen k und h induziert.

Hinsichtlich der Gruppen $\mathscr{A}(A; B)$ und $\mathscr{A}(A'; B')$ kann man das Folgende behaupten: man weisz, dasz es einen Homomorphismus von $\mathscr{A}(A; B)$ auf $\mathscr{A}(A'; B)$ gibt, und auszerdem, dasz in $\mathscr{A}(A'; B)$ eine Untergruppe $\mathscr{A}^*(A'; B)$ liegt, isomorph mit $\mathscr{A}(A'; B')$.

Das Urbild von $\mathscr{A}^*(A'; B)$ in $\mathscr{A}(A; B)$ ist eine Untergruppe $\mathscr{A}^*(A; B)$ von $\mathscr{A}(A; B)$, zusammengesetzt aus den jenigen Systemen $\{m_{\alpha,\beta}\}$, für die

$$k(m_{\alpha_1,\beta_1}) = k(m_{\alpha_2,\beta_2}), \text{ wenn } h(\alpha_1) = h(\alpha_2),\, h(\beta_1) = h(\beta_2).$$

§ 4. *Inverse Grenzgruppe*

Es sei

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

eine Folge von Gruppen, k_n eine homomorphe Abbildung von A_{n+1} auf A_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Man definiert die inverse Grenzgruppe A der Folgen $\{A_n\}$ und $\{k_n\}$ als die Gruppe der Elemente

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

mit $a_i \in A_i$, $a_n = k_n(a_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$, mit der Komposition

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)\,(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots).$$

Es sei $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ eine zweite Folge von Gruppen, h_n eine homomorphe Abbildung von B_{n+1} auf B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ und B die von den Folgen $\{B_n\}$ und $\{h_n\}$ gebildete inverse Grenzgruppe.

Das Vorangehende hat gezeigt, dasz man mit Hilfe einer gegebenen Erweiterung $G_1(A_1; B_1)$ immer eine Erweiterung $G_2(A_2; B_2)$ von A_2 durch B_2 und eine homomorphe Abbildung g_1 von G_2 auf G_1 bestimmen kann, welche k_1 und h_1 induziert. Hat man eine solche Erweiterung G_2, so gibt es analog eine Erweiterung $G_3(A_3; B_3)$ und ebenso eine homomorphe Abbildung g_2 von G_3 auf G_2, welche k_2 und h_2 induziert. Damit bekommt man eine Folge von Erweiterungen

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$$

und eine Folge von Homomorphismen $g_n : g_n(G_{n+1}) = G_n$, welche genau k_n und h_n induzieren $(n = 1, 2, \ldots)$. Diese Folgen $\{G_i\}$ und $\{g_i\}$ bestimmen eine inverse Grenzgruppe G und wir beweisen:

Satz II. Die inverse Grenzgruppe G der Folgen $\{G_n; g_n\}$ ist eine Erweiterung der Grenzgruppe A durch die Grenzgruppe B und umgekehrt ist jede Erweiterung $G(A; B)$ von A durch B mit einer inversen Grenzgruppe geeigneter Folgen $\{G_n(A_n; B_n)\}$ und $\{g_n\}$ isomorph.

Beweis: G ist die Gruppe der Folgen

$$(\alpha; a) = ((\alpha_1; a_1), (\alpha_2; a_2), \dots, (\alpha_n; a_n), \dots),$$
$$g_n(\alpha_{n+1}; a_{n+1}) = (h_n(\alpha_{n+1}); k_n(a_{n+1})) = (\alpha_n; a_n).$$

Sei

$$(\beta; b) = ((\beta_1; b_1), (\beta_2; b_2), \dots),$$

dann ist

$$(\alpha; a)\,(\beta; b) = ((\alpha_1\beta_1; m_{\alpha_1,\beta_1} a_1 b_1), (\alpha_2\beta_2; m_{\alpha_2,\beta_2} a_2 b_2), \dots),$$
$$k_n(m_{\alpha_{n+1},\beta_{n+1}}) = m_{\alpha_n,\beta_n}, \text{ wenn } h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,\ h_n(\beta_{n+1}) = \beta_n.$$

G enthält die Untergruppe der Elemente

$$(\varepsilon; a) = ((\varepsilon_1; a_1), (\varepsilon_2; a_2), \dots),\ k_n(a_{n+1}) = a_n,$$

d.h. eine Gruppe, isomorph mit A. Bildet man das Element

$$(\alpha; a) = ((\alpha_1; a_1), (\alpha_2; a_2), \dots)$$

ab auf $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, so ist die Abbildung $(\alpha; a) \to \alpha$ eine homomorphe Abbildung von G auf B mit dem Kern A, m.a.W.: G ist eine Erweiterung von A durch B.

Wählt man in G die Repräsentanten

$$g_\alpha = (\alpha : e) = ((\alpha_1; e_1), (\alpha_2; e_2), \dots),\ h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,$$

so liegen zwei verschiedene dieser Elemente immer in verschiedenen Nebenklassen von A (denn sie haben verschiedene Bilder in B) und jede Nebenklasse von A wird genau einmal repräsentiert. Aus

$$(\alpha; e)\,(\beta; e) = ((\alpha_1\beta_1; m_{\alpha_1,\beta_1}), (\alpha_2\beta_2; m_{\alpha_2,\beta_2}), \dots)$$

folgt

$$(\alpha; e)\,(\beta; e) = (\alpha\beta; e)\,(\varepsilon; m_{\alpha,\beta}), \text{ mit}$$
$$(\varepsilon\,; m_{\alpha,\beta}) = ((\varepsilon_1; m_{\alpha_1,\beta_1}), (\varepsilon_2; m_{\alpha_2,\beta_2}), \dots),$$

also

$$m_{\alpha,\beta} = (m_{\alpha_1,\beta_1}, m_{\alpha_2,\beta_2}, \dots),$$

wo

$$k_n(m_{\alpha_{n+1},\beta_{n+1}}) = m_{\alpha_n,\beta_n}, \text{ wenn } h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,\ h_n(\beta_{n+1}) = \beta_n.$$

Umgekehrt: Es sei $G(A; B)$ bestimmt mittels eines Systems von Faktoren $\{m_{\alpha,\beta}\} \in A$ (d.h. es gebe für jedes Paar $\alpha, \beta \in B$ ein $m_{\alpha,\beta} \in A$, so dasz (1) und (2) gelten). Jedes Element $m_{\alpha,\beta} \in A$ hat die Form einer Folge von Elementen aus $\{A_n\}$, jedes $\alpha \in B$ hat die Form $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, wo $\alpha_n \in B_n$.

Setzen wir nun

$$m_{\alpha,\beta} = (m_{\alpha_1,\beta_1}, m_{\alpha_2,\beta_2}, \ldots),$$

so gilt

(4) $$k_n(m_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}) = m_{\alpha_n, \beta_n} \text{ für } h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,\ h_n(\beta_{n+1}) = \beta_n.$$

Zu jedem Element $m_{\alpha,\beta} \in A$ gehört also, für jedes n, ein $m_{\alpha_n,\beta_n} \in A_n$, $\alpha_n, \beta_n \in B_n$ und aus den Relationen (1) und (2) für $m_{\alpha,\beta}$ folgt, dasz auch die $\{m_{\alpha_n,\beta_n}\} \in A_n$ den analogen Relationen (1) und (2) genügen, d.h. die $\{m_{\alpha_n,\beta_n}\}$ bestimmen eine Erweiterung $G_n(A_n; B_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Auszerdem genügen die Faktoren immer den Relationen (4), d.h., die Folge $G_1, G_2, G_3, \ldots$ ist eine Folge von Erweiterungen, für die eine Folge von Homomorphismen $g_n(G_{n+1}) = G_n$ existiert; diese Folgen bestimmen eine inverse Grenzgruppe G^*, welche eine Erweiterung ist von A durch B, und für die ein Faktorsystem besteht, das mit dem ursprünglichen System $\{m_{\alpha,\beta}\}$ übereinstimmt.

Mit Hilfe der Folgen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \text{ und } B_1, B_2, B_3, \ldots$$

läszt sich eine dritte Folge definieren, nämlich die Folge der Gruppen $\mathscr{A}_n(A_n; B_n)$ aller Erweiterungen von A_n durch $B_n (n = 1, 2, \ldots)$; es ist

$$\mathscr{A}_n(A_n; B_n) = F_n(A_n; B_n)/T_n(A_n; B_n).$$

Man kann nun eine inverse Grenzgruppe $\mathscr{A}^*$ definieren, wenn man erstens gewisse Folgen definiert:

(5) $$(m_{\alpha,\beta}) = ((m_{\alpha_1,\beta_1}), (m_{\alpha_2,\beta_2}), \ldots, (m_{\alpha_n,\beta_n}), \ldots),$$

so dasz, für jedes n, (m_{α_n,β_n}) ein derartiges Faktorsystem von $F_n(A_n; B_n)$ darstellt, für das

(6) $$k_n(m_{\alpha_{n+1},\beta_{n+1}}) = m_{\alpha_n,\beta_n}, \text{ wenn } h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,\ h_n(\beta_{n+1}) = \beta_n.$$

Sind $(m_{\alpha,\beta})$ und $(n_{\alpha,\beta})$ zwei Systeme von der genannten Form, so definiert man

$$(m_{\alpha,\beta})\,(n_{\alpha,\beta}) = ((m_{\alpha_1,\beta_1})\,(n_{\alpha_1,\beta_1}), \ldots, (m_{\alpha_k,\beta_k})\,(n_{\alpha_k,\beta_k}), \ldots)$$

und

$$(m_{\alpha,\beta})^{-1} = ((m_{\alpha_1,\beta_1})^{-1}, \ldots (m_{\alpha_k,\beta_k})^{-1}, \ldots).$$

Das Produkt und das inverse Element genügen auch (6); die durch (5) definierten Systeme $(m_{\alpha,\beta})$ bestimmen also eine Gruppe F^*; diese Gruppe enthält besondere Elemente, aufgebaut mit Hilfe der Transformationssysteme $\{c_{\alpha_n\beta_n}^{-1}\, c_{\alpha_n}\, c_{\beta_n}) \in T_n(A_n; B_n)$, wofür $k_n(c_{\alpha_{n+1}}) = c_{\alpha_n}$, wenn $h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$.

Diese Systeme

$$(c_{\alpha\beta}^{-1}\, c_\alpha\, c_\beta) = ((c_{\alpha_1\beta_1}^{-1}\, c_{\alpha_1}\ c_{\beta_1}), (c_{\alpha_2\beta_2}^{-1}\, c_{\alpha_2}\, c_{\beta_2}), \ldots)$$

bestimmen eine inverse Grenzgruppe $T^* \subset F^*$, und die Faktorgruppe

$\mathscr{A}^* = F^*/T^*$ ist also die Gruppe der nichtäquivalenten Systeme (5), für die (6) gilt. Aus Satz II folgt nun, dasz diese Faktorgruppe $\mathscr{A}^*$ mit $\mathscr{A}(A; B)$ isomorph ist, also

Satz III. Die Folge $\{\mathscr{A}_n(A_n; B_n)\}$ der Gruppen aller Erweiterungen von A_n durch $B_n (n = 1, 2, \ldots)$ bestimmt, mit Hilfe der Homomorphismen k_n und h_n, eine inverse Grenzgruppe $\mathscr{A}^*$, isomorph mit der Gruppe $\mathscr{A}(A; B)$.

§ 5. Es sei $G(A; B)$ eine Erweiterung von A durch B, $G'(A'; B')$ eine Erweiterung von A' durch B' und g eine homomorphe Abbildung von G in G', welche A auf A' abbildet, so induziert g zwei Homomorphismen k und h:

$$k(A) = A', \; h(B) = B'' \subset B'.$$

Die übliche Wahl der Repräsentanten $\{g_\alpha\}$ und $\{g'_{\alpha'}\}$

$$g(g_\alpha) = g'_{\alpha''}, \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha'',$$

gibt Anlasz zu den Faktorsystemen $\{m_{\alpha,\beta}\}$ und $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ mit

$$k(m_{\alpha,\beta}) = m'_{\alpha'',\beta''} \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha'', \; h(\beta) = \beta''; \tag{7}$$

dabei treten naturgemäsz nur die α'', β'' auf, welche h-Bild von Elementen aus B sind. Sind nun A, B, A', B' und die Homomorphismen k und h gegeben:

$$k(A) = A', \, h(B) = B'' \subset B',$$

so kann man alle Erweiterungen $G(A; B)$, $G'(A'; B')$ mit einem Homomorphismus g von G in G' bestimmen, derart, dasz g genau k und h induziert. Dazu hat man für A und B (bzw. A' und B') die zulässigen Faktorsysteme $\{m_{\alpha,\beta}\}$ (bzw. $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$) zu bestimmen, welche (1), (2) und (7) genügen.

Sind $\{m_{\alpha,\beta}\}$ und $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ zwei derartige Systeme, so bestimmt $\{m_{\alpha,\beta}\}$ eine Erweiterung $G(A; B)$, $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ eine Erweiterung $G'(A'; B')$, und die homomorphe Abbildung g

$$g(\alpha; a) = (h(\alpha); k(a)) = (\alpha'; a')$$

hat die verlangte Eigenschaft.

Mit Hilfe eines passenden Faktorsystems $\{m_{\alpha,\beta}\}$ für eine Erweiterung $G(A; B)$, das auch (7) befriedigt, bestimmt man sofort ein System von Faktoren $\{m'_{\alpha'',\beta''}\}$ in A' mittels der Abbildung

$$k(m_{\alpha,\beta}) = m'_{\alpha'',\beta''}, \text{ wenn } h(\alpha) = \alpha'', \; h(\beta) = \beta''.$$

Das Faktorsystem $\{m'_{\alpha'',\beta''}\}$ gibt Anlasz zu einer Erweiterung $G''(A'; B'')$ von A' durch $B'' = h(B)$, und $g(\alpha; a) = (h(\alpha); k(a)) = (\alpha''; a')$ ist eine homomorphe Abbildung von $G(A; B)$ auf $G''(A'; B'')$ und induziert k und h.

Benutzt man einen von S. EILENBERG–S. MACLANE bewiesenen Satz (Group extensions and homology, Annals of Math., 2nd Ser. 43 (1942); Lemma 23.1, wo der homomorphe Charakter der Abbildung von $\mathscr{A}(A'; B')$ auf $\mathscr{A}(A'; B'')$ bewiesen ist), so zeigt sich, dasz zu der soeben gefundenen Erweiterung $G''(A'; B'')$ immer eine Erweiterung $G'(A'; B')$ existiert.

Der Homomorphismus g, welcher das Element $(\alpha; a)$ überführt in $(h(\alpha); k(a)) = (\alpha''; a') \in G'(A'; B')$, genügt der gestellten Forderung, und auf diese Weise bekommt man alle möglichen Erweiterungen $G(A; B)$ und $G'(A'; B')$ mit dem zugehörigen Homomorphismus g, so dasz k und h induziert werden.

Sind umgekehrt A, A', B, B' und die Homomorphismen k und h gegeben, so dasz

$$k(A) = A',\ h(B) = B'' \subset B',$$

und ist $G'(A'; B')$ eine Erweiterung von A' durch B', so läszt sich sofort beweisen, dasz auch in diesem Fall eine Erweiterung $G(A; B)$ existiert und auszerdem ein Homomorphismus g von $G(A; B)$ in $G'(A'; B')$, welcher genau k und h induziert.

Die Erweiterung $G'(A'; B')$ bestimmt nämlich auf natürliche Weise eine Erweiterung $G''(A'; B'')$; dazu beschränkt man ein für $G'(A'; B')$ passendes Faktorsystem $\{m'_{\alpha',\beta'}\}$ auf ein System $\{m'_{\alpha'',\beta''}\}$, indem man nur die Faktoren $m'_{\alpha'',\beta''}$ benutzt mit α'' und β'' aus $B'' = h(B)$.

In § 4 ist bewiesen worden, dasz eine Erweiterung $G''(A'; B'')$, für die $k(A) = A'$, $h(B) = B''$, immer eine Erweiterung $G(A; B)$ und eine homomorphe Abbildung g bestimmt, so dasz g die gegebenen Homomorphismen $k(A) = A'$, $h(B) = B'' \subset B'$ induziert.

Bemerkung: Es liegt auf der Hand, im Anfang allgemeiner vorauszusetzen, dasz $k(A) \subset A'$, $h(B) \subset B'$; zu einer gegebenen Erweiterung $G'(A'; B')$ soll dann eine Erweiterung $G(A; B)$ und eine homomorphe Abbildung g bestimmt werden, so dasz g die Abbildungen k und h induziert. Dieses Problem ist aber im Allgemeinen unlösbar: Sei im Allgemeinen M_0 eine Untergruppe von M; jede Erweiterung $G_0(M_0; N)$ von M_0 durch eine Gruppe N bestimmt auf natürliche Weise eine Erweiterung $G(M; N)$ von M durch N; diese injektive Abbildung der Erweiterungen von M_0 durch N auf Erweiterungen von M durch N führt zu einer natürlichen homomorphen Abbildung von $\mathscr{A}(M_0; N)$ in $\mathscr{A}(M; N)$; diese Abbildung braucht aber keineswegs eine „auf"-Abbildung zu sein. Wäre also $k(A) = A'' \subset A'$ (wo A'' eine echte Untergruppe von A' ist), so wäre es nicht immer möglich, zu einer Erweiterung $G''(A'; B'')$ eine passende Erweiterung $G^*(A''; B'')$ zu bestimmen; darum beschränkten wir uns auf $k(A) = A'$.

Es sei nun $\{A_n\}$ eine Folge von Gruppen, $\{k_n\}$ eine Folge von Homomorphismen mit $k_n(A_{n+1}) = A_n (n = 1, 2, \ldots)$, $\{B_n\}$ eine Folge von Gruppen, $\{h_n\}$ eine Folge von Homomorphismen mit $h_n(B_{n+1}) \subset B_n (n = 1, 2, \ldots)$.

Die Folgen $\{A_n\}$, $\{k_n\}$ bestimmen eine inverse Grenzgruppe A, die Folgen $\{B_n\}$, $\{h_n\}$ bestimmen eine inverse Grenzgruppe B, wenn man die Elemente von B definiert durch

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots),\ h_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

das Produkt zweier Elemente α und β aus B durch die Folge

$$\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots).$$

Mit Hilfe einer willkürlichen Erweiterung $G_1(A_1; B_1)$ ist es möglich eine Erweiterung $G_2(A_2; B_2)$ und eine homomorphe Abbildung g_1 mit $g_1(G_1) \subset G_2$ zu bestimmen, so dasz g_1 die Abbildungen k_1 und h_1 induziert.

Auf dieselbe Weise ist aus G_2 eine Gruppe $G_3(A_3; B_3)$ und eine Abbildung g_3 zu bestimmen, welche k_2 und h_2 induziert, u.s.w. Man bekommt also eine Folge

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, G_{n+1}, \ldots$$

und eine Folge von Homomorphismen $\{g_n\}$, $g_n(G_{n+1}) \subset G_n$, welche genau k_n und h_n induzieren.

Die Folgen $\{G_n\}$ und $\{g_n\}$ bestimmen eine inverse Grenzgruppe G; die Elemente von G sind

$$(\alpha; a) = ((\alpha_1; a_1), (\alpha_2; a_2), \ldots)$$

mit

$$g_n(\alpha_{n+1}; a_{n+1}) = (h_n(\alpha_{n+1}); k_n(a_{n+1})) = (\alpha_n; a_n).$$

Man beweist in üblicher Weise, dasz G eine Erweiterung von A durch B ist, und auszerdem, dasz jede Erweiterung $G(A; B)$ isomorph ist mit einer inversen Grenzgruppe geeigneter Folgen $\{G_n(A_n; B_n)\}$ und $\{g_n\}$.

Daraus folgt sofort:

Die Folge $\{\mathscr{A}(A_n; B_n)\}$ der Gruppen aller Erweiterungen von A_n durch B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmt – mit Hilfe der Homomorphismen k_n und h_n – eine inverse Grenzgruppe $\mathscr{A}^*$, isomorph mit $\mathscr{A}(A; B)$.

Wenn man nur voraussetzt, dasz die Gruppen A abelsch sind und man also die Möglichkeit offen läszt, dasz die Gruppen B und die möglichen Erweiterungen $G(A; B)$ nichtabelsch sind, dann ist sofort zu beweisen, dasz die homomorphe Abbildung von $\mathscr{A}(A; B)$ in $\mathscr{A}(A; B')$ ein Epimorphismus ist, vorausgesetzt, dasz B' ein homomorphes Bild $h(B)$ von B ist. Es sei nämlich $G(A; B)$ eine Erweiterung der abelschen Gruppe A durch irgendeine Gruppe B', g eine homomorphe Abbildung von G auf G', welche A elementweise invariant läszt und die Abbildung $h(B) = B'$ induziert. Wählt man die Repräsentanten $\{g_\alpha\}$, $\{g_{\alpha'}\}$ in üblicher Weise, so zeigt sich

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\alpha',\beta'},\ \text{wenn}\ h(\alpha) = \alpha',\ h(\beta) = \beta',$$

und

$$a\varphi_\alpha = a\varphi_{\alpha'},\ \text{wenn}\ h(\alpha) = \alpha',$$

also $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha'}$, wenn $h(\alpha) = \alpha'$.

Eine begleitende homomorphe Abbildung θ von B in der Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von A bestimmt also eine begleitende hom. Abb. θ' von B' in $\mathfrak{A}$. Hat man umgekehrt A, B, B' gegeben (A abelsch) und ist $h(B)=B'$ eine hom. Abb. von B auf B', so läszt sich herausstellen, dasz eine begleitende hom. Abb. θ' von B' in $\mathfrak{A}$ sofort eine begleitende hom. Abb. θ von B in $\mathfrak{A}$ bestimmt, denn man definiert $\theta\colon \alpha \rightarrow \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha'}$, wenn $h(\alpha)=\alpha'$.

Hat man nun ein zu θ' passendes Faktorsystem $\{m_{\alpha',\beta'}\}$, so hat man sofort und eindeutig ein zu θ passendes System $\{m_{\alpha,\beta}\}$, nämlich

$$m_{\alpha,\beta} = m_{\alpha',\beta'}, \text{ wenn } h(\alpha)=\alpha',\ h(\beta)=\beta',$$

und das genügt allen Forderungen.

Man kann also zu jeder Erweiterung $G'(A;B')$ eine Erweiterung $G(A;B)$ und eine hom. Abb. g von G auf G' bestimmen, so dasz g die identische Abb. von A auf sich induziert und $h(B)=B'$, vorausgesetzt, dasz man nur weisz, dasz A abelsch ist. Für *diesen* Fall ist auch der Inhalt von Satz II richtig.

§ 6. Man kann das analoge Problem für direkte Grenzgruppen untersuchen. Man hat dann aber nicht die Möglichkeit die Folge der Gruppen $G_n(A_n; B_n)$ einfach zu bestimmen. Es sei $\{A_n\}$ eine Folge von Gruppen, $\{k_n\}$ eine Folge von homomorphen Abbildungen $k_n(A_n)=A_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Man definiert die direkte Grenzgruppe A als die Gruppe der Elemente

$$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

so dasz $a_{n+1}=k_n(a_n)$, $n=1, 2, \ldots$, und für

$$a=(a_1, a_2, \ldots), \ b=(b_1, b_2, \ldots)$$

das Produkt

$$a\cdot b=(a_1b_1, a_2b_2, \ldots).$$

Ist auf analoge Weise B die direkte Grenzgruppe der Folgen $\{B_n\}$ und $\{h_n\}$, mit $h_n(B_n)=B_{n+1}$, so kann man einfach folgendes einsehen:

Sei

$$G_1(A_1; B_1),\ G_2(A_2; B_2), \ldots$$

eine Folge Erweiterungen $G_n(A_n; B_n)$ von A_n durch B_n, so dasz es eine hom. Abb. g_n von G_n auf G_{n+1} gibt, welche k_n und h_n induziert, so bestimmen die Folgen $\{G_n\}$ und $\{g_n\}$ eine direkte Grenzgruppe G; G ist die Gruppe der Elemente

$$(\alpha; a)=((\alpha_1; a_1), (\alpha_2; a_2), \ldots),$$

für die

$$g_n(\alpha_n; a_n)=(\alpha_{n+1}; a_{n+1}),\ n=1, 2, \ldots$$

G enthält also eine Untergruppe, isomorph mit A, und es ist $G/A \cong B$. Umgekehrt erweist sich, dasz man jede Erweiterung G von A durch B

bekommt durch geeignete Wahl der Folgen $\{G_n\}$ und $\{g_n\}$. Es ist ja jede Erweiterung $G(A; B)$ bestimmt, wenn man ein Faktorsystem $\{m_{\alpha,\beta}\}$ hat, das (1) und (2) genügt. Wenn

$$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \ \beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots),$$

dann ist jedes $m_{\alpha,\beta}$ zu schreiben

$$m_{\alpha,\beta}=(m_{\alpha_1,\beta_1}, m_{\alpha_2,\beta_2}, \ldots)$$

mit

$$k_n(m_{\alpha_n,\beta_n})=m_{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}, \text{ wenn } h_n(\alpha_n)=\alpha_{n+1}, h_n(\beta_n)=\beta_{n+1}.$$

Wenn die $\{m_{\alpha,\beta}\}$ (1) und (2) befriedigen, so haben die $\{m_{\alpha_n,\beta_n}\}$ auch dieselbe Eigenschaft, und die Systeme $\{m_{\alpha_n,\beta_n}\}$ bestimmen also eindeutig Erweiterungen $G_n(A_n; B_n)$ und auszerdem eine homomorphe Abbildung g_n von G_n auf G_{n+1}, und die direkte Grenzgruppe der Folgen $\{G_n\}$ und $\{g_n\}$ ist isomorph mit $G(A; B)$.

Man hat aber in diesem Fall nicht die Möglichkeit, in der Folge $G_1(A_1; B_1), G_2(A_2; B_2), \ldots$ die Erweiterung $G_1(A_1; B_1)$ willkürlich vorzuschreiben (siehe den Schlusz von § 3). Wenn man sicher sein will, dasz man zu einer gegebenen Erweiterung $G_1(A_1; B_1)$ immer eine fortsetzende Folge $G_1, G_2, \ldots$ und eine Folge von homomorphen Abbildungen konstruieren kann, so musz man voraussetzen, dasz in der Folge der Gruppen $\{B_n\}$ alle $B_n=B$ sind, wo B eine willkürliche Gruppe ist und für allen h_n die identische Abbildung von B auf sich. Dann bestimmt jede Erweiterung $G_1(A_1; B_1)$ eine Erweiterung $G_2(A_2; B)$ und eine homomorphe Abbildung g_1 von G_1 auf G_2, welche genau k_1 und die identische Abbildung von B auf sich induziert. Auf diese Weise bekommt man eine fortschreitende Folge von Erweiterungen $G_n(A_n; B_n)$ mit einer Folge von Homomorphismen $\{g_n\}$, und für sie gelten die oben besprochenen Sätze.